



Städtische-Marian-Batko-Berufsoberschule
Ausbildungsrichtung Technik

Seminararbeit

DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

— ZUSAMMENSTELLUNG

EINIGER LÖSBARER TYPEN

Shanna Garaganova 13 B

Seminarbetreuung: Frau Kaindl

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

München, 15.10.03

Shanna Garaganova

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1: Einleitung	4
Kapitel 2: Definition, Einteilung und Grundbegriffe	5
2.1 Definition einer Differenzialgleichung	5
2.2 Allgemeine, partikuläre und singuläre Lösungen	6
2.3 Gewöhnliche und partielle Differenzialgleichungen.....	7
2.4 Ordnung der Differenzialgleichung.....	8
2.5 Lineare Differenzialgleichungen	8
2.6 Explizite und implizite Differenzialgleichungen	10
Kapitel 3: Beispiele für einige lösbare Typen	11
3.1 Der einfachste Typ von Differenzialgleichungen	11
3.2 Trennung der Variablen (Separation).....	12
3.3 Substitution (Ähnlichkeitstransformation)	14
3.4 Homogene Differenzialgleichung	16
3.5 Bernoulli'sche Differenzialgleichung	19
3.6 Riccati'sche Differenzialgleichung.....	22
Kapitel 4: Schluss	25
Literaturverzeichnis	26
Verwendete Internetseiten	27
Anhang	

Kapitel 1: Einleitung

Viele Vorgänge in der Technik lassen sich durch Differenzialgleichungen beschreiben. Man findet sie in der Physik, der Chemie, der Biologie und in vielen anderen Wissenschaften, in denen Mathematik angewendet wird. Das Bemerkenswerte an Differenzialgleichungen ist, dass vor allem Veränderungen bestimmter Größen relativ einfach in Form einer Differenzialgleichung formuliert werden können, was die Berechnung meistens wesentlich vereinfacht. So kann man zum Beispiel mit Hilfe der Differenzialgleichungen den Bevölkerungswachstum, die Vermehrung von Bakterien oder den radioaktiven Zerfall zu jedem beliebigen Zeitpunkt ausrechnen, wenn die am Anfang vorhandene Menge bekannt ist. Aber auch solche physikalische Prozesse wie Schwingungen, der freie Fall oder optische Systeme lassen sich in Form einer Differenzialgleichung ausdrücken.

Im Rahmen des Mathematikunterrichts in der Oberstufe wird der Schüler mit dem Bereich der Differenzialrechnung konfrontiert. Man lernt die Grundsätze der Kurvendiskussion, des Ableitens und des Integrierens kennen, welche als Voraussetzungen für das Verstehen der höheren Mathematik unabdingbar sind. Eines der weiterführenden Teilgebiete, bei dem diese Vorkenntnisse notwendig sind, befasst sich mit der Problematik der Differenzialgleichungen.

Die vorliegende Arbeit will nun zunächst in das Gebiet der gewöhnlichen Differenzialgleichungen einführen, wichtige Grundbegriffe erklären und einige Lösungsmethoden für Differenzialgleichungen aufzeigen, wobei auch mathematische Sonderfälle wie die Bernoulli'sche und Riccati'sche Differenzialgleichung behandelt werden. Dabei werden die einzelnen Lösungsmethoden nachvollziehbar hergeleitet und durch Beispiele verdeutlicht.

Kapitel 2: Definition, Einteilung und Grundbegriffe

2.1 Definition einer Differenzialgleichung

Wir betrachten zunächst eine Funktion

$$y(x) = x^2 - 2x - 3. \quad (1)$$

Es gibt unendlich viele Zahlenpaare $(x; y)$, die Gleichung (1) erfüllen und den Graphen der Funktion, in diesem Fall eine Parabel, bilden. Nun wird die erste Ableitung der Funktion betrachtet:

$$y'(x) = 2x - 2 \quad (2)$$

Wäre nur diese letzte Gleichung gegeben, so stünde man jetzt vor der Frage, wie die Ursprüngliche Funktion $y(x)$ lautet. Gelingt die Beantwortung dieses Problems, so hat man schon eine erste sehr einfache Differenzialgleichung gelöst.¹

Da die Differenzialgleichung (2) durch das Ableiten einer Funktion entstanden ist, liegt es nahe, die Lösung mit Hilfe der Integration zu suchen. Beide Seiten werden nun unbestimmt nach x integriert:

$$\int y'(x) dx = \int (2x - 2) dx \quad (3)$$

Man erhält:

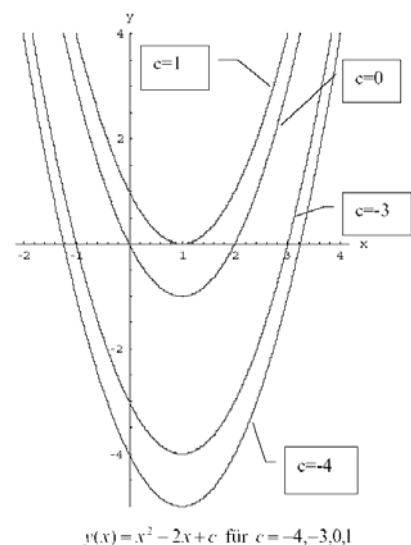
$$y(x) + k = x^2 - 2x + l \quad \text{mit } k, l \in \mathfrak{R} \quad (4)$$

und ersetzt die Differenz der Integrationskonstanten k und l durch eine Konstante C :

$$\text{aus } y(x) = x^2 - 2x + (l - k) \quad (5)$$

$$\text{folgt } y(x) = x^2 - 2x + C \quad \text{mit } C \in \mathfrak{R}. \quad (6)$$

Die Lösung der Differenzialgleichung (2) ist also eine Parabelschar mit einer willkürlichen Konstanten. In der Abbildung rechts werden einige Grafen der Funktionen Aus dieser Parabelschar dargestellt.



Anhand dieses einfachen Beispiels lassen sich bereits einige wichtige Begriffe erklären:

Eine **Differenzialgleichung**, oft abgekürzt als **DGL**, ist eine Gleichung, die eine Funktion $f(x)$ und eine oder mehrere Ableitungen dieser Funktion enthält.²

¹ Kunick 1989, S. 1

² <http://de.wikipedia.org/wiki/Differenzialgleichung>

Um eine DGL zu lösen, muss eine Funktion gefunden werden, die der Differenzialgleichung genügt.³ Die Lösungen sind also Funktionen, und die Differenzialgleichung selbst beschreibt eine Beziehung zwischen diesen Funktionen und ihren Ableitungen.⁴

Beispiele für Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

$$y' = 0 \quad y' = ay \quad y'' + ay = 0 \quad \text{mit } a \in \mathfrak{R}$$

Beispiele für Differenzialgleichungen mit Funktionen als Koeffizienten:

$$y' = f(x) \quad y' = p(x)y + q(x) \quad f(x), p(x) \text{ und } q(x) \text{ sind stetige Funktionen}$$

2.2 Allgemeine, partikuläre und singuläre Lösungen

Die Aufgabe, elementare Differenzialgleichungen zu lösen, besteht im wesentlichen darin, die Stammgleichung zurückzugewinnen, aus der die Gleichung entstanden ist.⁵

Eine Funktion $y=y(x)$ heißt eine **Lösung der Differenzialgleichung**, wenn sie mit ihren Ableitungen die Differenzialgleichung identisch erfüllt.⁶

Wir unterscheiden zwischen der *allgemeinen Lösung* und der *partikulären Lösung*. Im Beispiel aus dem Abschnitt 2.1 erhielt man zunächst eine unendliche Menge von Funktionen, die die Differenzialgleichung $y'(x) = 2x - 2$ erfüllten und sich nur durch eine willkürliche Konstante C (oder auch Parameter C genannt) unterschieden:

$$y(x) = x^2 - 2x + C \quad \text{mit } C \in \mathfrak{R}.$$

Die Gesamtheit dieser Funktionen wird als *allgemeine Lösung* oder *allgemeines Integral* der Differenzialgleichung bezeichnet.⁷

Wird dem Parameter C ein fester Wert zugeordnet, erhält man eine einzelne Funktion der Schar, die als *partikuläre Lösung* oder *partikuläres Integral* bezeichnet wird.⁵

Für $C = -3$ erhält man zum Beispiel die Funktionsgleichung $y(x) = x^2 - 2x - 3$

Dies ist eine partikuläre Lösung der Differenzialgleichung $y'(x) = 2x - 2$.

Eine partikuläre Lösung wird also aus der allgemeinen Lösung gewonnen, indem man aufgrund zusätzlicher Bedingungen den Parametern feste Werte zuweist. Dies kann durch *Randwertbedingungen* oder *Anfangsbedingungen* geschehen.⁶

Später sehen wir anhand eines Beispiels (siehe Abschnitt 3.2), dass die allgemeine Lösung nicht alle partikuläre Lösungen einschließt. Solche Lösungen, die sich nicht durch Spezialisierung der Konstanten C ergeben, heißen *singuläre Lösungen*.⁸

³ <http://de.wikipedia.org/wiki/Differentialgleichung>

⁴ <http://www.math.unibas.ch/~imhof/MfN/LinAlg/Leitfaden/Leitfaden085-96.pdf>

⁵ Ayeres 1978, S. 7

⁶ <http://mypage.bluewin.ch/tamburrino/FHSO/03-Gewoehnliche-DGL.pdf>

⁷ Vgl. Bronstein 1999 S. 482

2.3 Gewöhnliche und partielle Differenzialgleichungen

Differenzialgleichungen werden nach unterschiedlichen Kriterien klassifiziert. Dabei schließen sich die einzelnen Klassifikationen nicht gegenseitig aus.

Zunächst können Differenzialgleichungen nach der Anzahl der *unabhängigen Veränderlichen* eingeteilt werden. Eine unabhängige Veränderliche oder unabhängige Variable ist eine Größe, die nach und nach beliebige Zahlenwerte unabhängig von den anderen Größen annehmen kann.⁹ In dem Beispiel $y(x) = x^2 - 2x - 3$ ist x die unabhängige Veränderliche, weil x beliebige Werte aus der Definitionsmenge unabhängig von der Variablen y annehmen kann. Dagegen wird y als *abhängige Veränderliche* oder abhängige Variable bezeichnet, weil der Wert von y von dem Wert, den die Variable x annimmt, abhängig ist.

Enthält die Differenzialgleichung nur eine einzige unabhängige Veränderliche, so sind die Ableitungen gewöhnliche Ableitungen und die Gleichung wird dementsprechend als eine **gewöhnliche Differenzialgleichung** bezeichnet.¹⁰

Beispiele für gewöhnliche Differenzialgleichungen:

$$y' = (3x + 4) \cdot y \qquad \frac{dy}{dx} = x + 5 \qquad xy' + y = 3 \qquad (y'')^2 + (y')^3 + 3y = x^2$$

Enthält die Differenzialgleichung zwei oder mehr unabhängige Veränderliche, so sind die Ableitungen partielle Ableitungen und die Gleichung wird dementsprechend als eine **partielle Differenzialgleichung** bezeichnet.¹⁰

Beispiele für partielle Differenzialgleichungen:

$$\frac{dz}{dx} = z + x \frac{dz}{dy} \qquad \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2} = x^2 + y$$

In dieser Arbeit betrachten wir nur gewöhnliche Differenzialgleichungen und gehen auf partielle Differenzialgleichungen nicht näher ein.

2.4 Ordnung der Differenzialgleichung

Als Nächstes können Differenzialgleichungen nach der höchsten vorkommenden Ableitung eingeteilt werden. An dieser Stelle soll zuerst der Begriff der Ordnung einer Differenzialgleichung eingeführt werden.

Unter der **Ordnung** einer Differenzialgleichung versteht man die Ordnung der höchsten vorkommenden Ableitung.¹⁰

⁸ http://mailbox.univie.ac.at/Wilfried.Grossmann/uebungen/Mathe2_SS03/Differenzialgleichungen.pdf

⁹ Vgl. Demmig 1991, S. 5

¹⁰ Ayeres 1978, S. 1

Die allgemeine Form für eine gewöhnliche DGL erster Ordnung lautet:

$$y' = f(x, y)$$

Diese Schreibweise bedeutet, dass die DGL erster Ordnung eine Funktion $f(x)$, mit einer unabhängigen Veränderlichen x und der abhängigen Veränderlichen y , und die erste Ableitung von y beinhaltet.

Die allgemeine Form für eine gewöhnliche DGL zweiter Ordnung lautet demnach:

$$y'' = f(x, y, y')$$

Die höchste vorkommende Ableitung ist in diesem Fall zweiter Ordnung.

Bei den gewöhnlichen Differenzialgleichungen n-ter Ordnung handelt es sich um Gleichungen vom folgenden Typ:¹¹

$$y^n = f(y^{(n-1)}, \dots, y', x)$$

Beispiele:

$y' - yx = 0$	gewöhnliche DGL erster Ordnung
$y'' + y' + y = x^2 + 2x + 2$	gewöhnliche DGL zweiter Ordnung
$y''' + 2(y'')^2 + y' = \cos x$	gewöhnliche DGL dritter Ordnung

2.5 Lineare Differenzialgleichungen

Bevor wir den Gleichungstyp *lineare Differenzialgleichungen* anschauen, soll hier der Begriff *Grad einer Differenzialgleichung* erläutern.

Als **Grad einer Differenzialgleichung** wird die höchste auftretende Potenz einer Funktion und ihrer Ableitungen in dieser Differenzialgleichung bezeichnet.¹²

Kommt ein Produkt der Funktion und ihrer Ableitung/en vor, so ist der Grad der Differenzialgleichung die Summe ihrer Potenzen.

Beispiele:

$y'' + y' + y = x^2 + 2x + 2$	gewöhnliche DGL zweiter Ordnung ersten Grades
$yy' = x$	gewöhnliche DGL erster Ordnung zweiten Grades
$4x^5 y^2 + 2y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \cos x - 5y + 7 = 0$	gewöhnliche DGL erster Ordnung dritten Grades

Differenzialgleichungen ersten Grades heißen auch linear.

¹¹ Kunick 1989, S. 1

¹² <http://kerr.physik.uni-erlangen.de/~langer/dgl.ps>

Differenzialgleichungen heißen **linear**, wenn die unbekannte Funktion und ihre Ableitungen nur linear, d. h. in der ersten Potenz und nicht miteinander multipliziert vorkommen.¹³

Die allgemeine Form der Differenzialgleichung erster bzw. zweiter Ordnung lautet:¹⁴

$$a(x)y''+b(x)y'+c(x)y = f(x) \quad \text{lineare DGL zweiter Ordnung}$$

$$b(x)y'+c(x)y = f(x) \quad \text{lineare DGL erster Ordnung}$$

Die Funktion $f(x)$ heißt *Störfunktion* oder *Störglied* der Differenzialgleichung. Gilt¹⁴

$$f(x) = 0, \text{ so heißt die DGL homogen,}$$

$$f(x) \neq 0, \text{ so heißt die DGL inhomogen.}$$

Beispiele für lineare homogene Differenzialgleichungen:

$$y'+\frac{y}{x} = 0 \quad y'+2xy = 0$$

Beispiele für lineare inhomogene Differenzialgleichungen:

$$y'+\frac{y}{x} = x^2 \quad y'+2xy = 4x$$

Im Gegensatz zu den nichtlinearen Typen haben die linearen viele gemeinsamen Eigenschaften und lassen sich daher systematischer behandeln. Man ist in der Lage, allgemeine Aussagen über die Lösungen zu machen und darauf Lösungsmethoden aufzubauen.¹⁴

2.6 Explizite und implizite Differenzialgleichungen

Differenzialgleichungen können explizit oder implizit dargestellt werden.¹⁵

$$y^n = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad \text{explizite Form}$$

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{implizite Form}$$

Explizit heißt „entwickelt“. Eine explizite Funktionsgleichung ist nach einer der Veränderlichen entwickelt, d.h. nach einer der Veränderlichen, und zwar nach der abhängigen Veränderlichen, aufgelöst.¹⁶

¹³ Vgl. Collatz 1973, S. 11

¹⁴ Vgl. Zwillig 1985, S 44

¹⁵ <http://mypage.bluewin.ch/tamburrino/FHSO/03-Gewoehnliche-DGL.pdf>

¹⁶ Demmig 1991, S. 10

Eine **explizite Differenzialgleichung** liegt vor, wenn sie nach der höchsten vorkommenden Ableitung aufgelöst ist.¹⁷

Implizit heißt „unentwickelt“. Eine implizite Funktionsgleichung ist nicht nach einer der Veränderlichen aufgelöst.¹⁸

Eine Differenzialgleichung, die nicht nach der höchsten vorkommenden Ableitung aufgelöst ist, heißt **implizite Differenzialgleichung**.¹⁷

Beispiel:

Eine explizite Darstellung einer Differenzialgleichung 2. Ordnung liegt vor, wenn sie nach y'' aufgelöst ist:

$$y'' = f(x, y, y').$$

Die Implizite Form dieser Differenzialgleichung 2. Ordnung lautet:

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Nicht jede in impliziter Darstellung gegebene Differenzialgleichung lässt sich in eindeutiger Weise nach der höchsten Ableitung auflösen und damit in expliziter Gestalt schreiben.¹⁹

¹⁷ Vgl. Bachmann 1975, S.114

¹⁸ Demmig 1991, S. 10

¹⁹ Preuß / Kossow 1990, S. 11

Kapitel 3: Beispiele für einige lösbare Typen

3.1 Der einfachste Typ von Differenzialgleichungen

Der einfachste Typ von Differenzialgleichungen ist ein Spezialfall einer gewöhnlichen Differenzialgleichung erster Ordnung:

$$y' = f(x) \quad (7)$$

Die DGL (7) kann auch in der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \text{oder} \quad dy = f(x)dx$$

geschrieben werden, denn y bzw. y' sind stets als Funktionen von x zu betrachten. Der Ausdruck $\frac{dy}{dx}$ wird in der Literatur als Differenzialquotient bezeichnet.²⁰

Durch Integration beider Seiten nach dy bzw. nach dx

$$\int y' dy = \int f(x) dx \quad (8)$$

erhält man die allgemeine Lösung der DGL:

$$y = \int f(x) dx + C \quad C \in \mathfrak{R} \quad (9)$$

Man kann der Konstanten C in (9) unendlich viele Werte erteilen und y erfüllt jedes mal die Differenzialgleichung (7), ist also jedes mal eine Lösung dieser Differenzialgleichung.

Mit Hilfe eines einfachen Beispiels wird die Vorgehensweise noch mal verdeutlicht (siehe auch Abschnitt 2.1):

$$y' = 3x^2 + 4x - 5x \quad (10) \quad \text{Beispiel}$$

$$\int y' dy = \int (3x^2 + 4x - 5x) dx \quad (11) \quad \text{Integration beider Seiten nach } dy \text{ bzw. nach } dx$$

$$y = x^3 + 2x^2 - 5x + C \quad C \in \mathfrak{R} \quad (12) \quad \text{Allgemeine Lösung der Differenzialgleichung}$$

²⁰ Vgl. Demmig 1991, S. 24

3.2 Trennung der Variablen (Separation)

Eine DGL 1.Ordnung heißt *separierbar*, wenn sie die allgemeine Form

$$y' = f(x) \cdot g(y) \quad (13)$$

hat.²¹ Ist die Differentialgleichung separierbar, so lässt sich der Lösungsansatz *Trennung der Variablen* (in der Literatur auch als Separation bezeichnet) anwenden. Bei dieser Methode wird eine Umformung der Gleichung durchgeführt, so dass auf einer Seite nur die Variable x mit ihrem Differenzial dx und auf der anderen Seite nur die Variable y mit ihrem Differenzial dy auftritt:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \quad \left| \cdot \frac{dx}{g(y)} \quad g(y) \neq 0 \right.$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \quad (14)$$

Anschließend werden beide Seiten nach der jeweiligen Variablen integriert:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx \quad \text{bzw.}$$

$$\int (g(y))^{-1} dy = \int f(x) dx \quad (15)$$

Durch die Integration der linken Seite nach dy bzw. der rechten Seite nach dx , erhält man die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (13).

Die Methode „Trennung der Variablen“ wird anhand eines konkreten Beispiels näher erläutert:

$$y' = (3x + 4) \cdot y \quad (16) \quad \text{Separierbare DGL 1. Ordnung}$$

$$\frac{dy}{dx} = (3x + 4) \cdot y \quad \left| \cdot \frac{dx}{y} \quad y \neq 0 \right. \quad - \quad \text{Trennung der Variablen}$$

$$\frac{dy}{y} = (3x + 4) dx \quad (17) \quad \text{Gleichung mit getrennten Variablen}$$

$$\int y^{-1} dy = \int (3x + 4) dx \quad (18) \quad \text{Integration beider Seiten nach } dy \text{ bzw. nach } dx$$

$$\ln|y| + k = \frac{3}{2}x^2 + 4x + l \quad (19) \quad \text{Wir erhalten auf beiden Seiten jeweils eine Integrationskonstante}$$

$$l - k = C \quad k, l \in \mathfrak{R} \quad - \quad \text{und fassen sie zu einer Konstanten zusammen}$$

²¹ Definition wurde im Seminarunterricht festgelegt

$$\ln|y| = \frac{3}{2}x^2 + 4x + C \quad C \in \mathfrak{R} \quad (20) \quad \text{Ersetzen der Konstanten } k \text{ und } l \text{ durch } C$$

$$|y| = e^{\frac{3}{2}x^2 + 4x + C} \quad (21) \quad \text{Umkehrfunktion von } \ln$$

$$|y| = e^{\frac{3}{2}x^2 + 4x} \cdot e^C \quad (22) \quad \text{Anwendung der Potenzregel}$$

$$e^C = D \quad D > 0 \quad - \quad \text{Definieren der Konstanten } e^C \text{ als } D$$

$$|y| = D \cdot e^{\frac{3}{2}x^2 + 4x} \quad (23) \quad \text{Ersetzen der Konstanten } e^C \text{ durch } D$$

$$y = \pm D \cdot e^{\frac{3}{2}x^2 + 4x} \quad (24) \quad \text{Auflösen der Betragsstriche}$$

$$\pm D = A \quad A \in \mathfrak{R} \setminus \{0\} \quad - \quad \text{Zusammenfassen der Konstanten } \pm D \text{ zu } A$$

$$y = A \cdot e^{\frac{3}{2}x^2 + 4x} \quad (25) \quad \text{Allgemeine Lösung der DGL}$$

Zusätzlich sollte immer der besondere Fall untersucht werden, ob die eventuelle Lösung $y_0 = 0$ in der Lösungsmenge vorhanden ist:

Ist $y = 0$, dann ist die Ableitung $y' = 0$.

Beide Werte setzt man in die Differenzialgleichung (16) ein:

$$0 = (3x + 4) \cdot 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Man sieht dass $y_0 = 0$ die Differenzialgleichung (16) erfüllt, d. h. $y_0 = 0$ ist eine Lösung dieser Differenzialgleichung. Hiermit wurde eine zusätzliche *singuläre Lösung* bestimmt, die jedoch in der allgemeinen Lösung nicht beinhaltet ist, denn damit der Term $A \cdot e^{\frac{3}{2}x^2 + 4x}$ den Wert „0“ annimmt, muss die Konstante A gleich null sein, weil $e^{\frac{3}{2}x^2 + 4x} > 0$. Die Konstante A wurde aber so definiert, dass sie immer verschieden von null ist: $A \in \mathfrak{R} \setminus \{0\}$. Es folgt daraus, dass der Ausdruck $A \cdot e^{\frac{3}{2}x^2 + 4x}$ mit $A \in \mathfrak{R} \setminus \{0\}$ immer verschieden von null ist, was bedeutet, dass die Lösung $y_0 = 0$ in der allgemeinen Lösung nicht vorhanden ist. Somit haben wir gezeigt, dass die allgemeine Lösung nicht alle partikuläre Lösungen einschließt (vgl. Abschnitt 2.2). Man fasst die allgemeine Lösung (25) und die singuläre Lösung zur einer neuen allgemeinen Lösung zusammen und erhält als Ergebnis:

$$y = A \cdot e^{\frac{3}{2}x^2 + 4x} \quad A \in \mathfrak{R} \quad (26)$$

Als Nächstes möchten wir noch mal verdeutlichen, was eine partikuläre Lösung ist. Gesucht ist eine spezielle Lösung der Differenzialgleichung mit der Randbedingung $y(1) = 3$. Man setzt die Werte $y = 3$ und $x = 1$ in die allgemeine Lösung (26) ein, um die Konstante A zu bestimmen:

$$3 = A \cdot e^{\frac{3}{2} \cdot 1^2 + 4 \cdot 1} \quad A \in \mathbb{R}$$

$$3 = A \cdot e^{5.5} \Rightarrow A = \frac{3}{e^{5.5}}$$

Man setzt die ausgerechnete Konstante in die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung ein und erhält die gesuchte partikuläre Lösung, die die Differenzialgleichung (16) und zugleich die vorgegebene Randbedingung erfüllt:

$$y = \frac{3}{e^{5.5}} \cdot e^{\frac{3}{2}x^2 + 4x}$$

3.3 Substitution

In der Integralrechnung verwendet man eine Methode namens Substitution, bei der sich gewisse Gruppen von Integralen auf die sogenannten Grundintegrale zurückführen lassen, indem man eine Funktion $g(x)$ ersetzt und zu einer neuen Variablen v , übergeht.²² Damit muss man auch das neue Differenzial dv einführen, das man aus der Beziehung $\frac{dv}{dx} = g'(x)$ erhält.²²

Die Integration durch Substitution wurde im Seminarunterricht auf folgende Weise definiert.²³

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(v) dv \quad \text{mit } g(x) = v \quad \text{und} \quad g'(x) = \frac{dv}{dx} \Rightarrow g'(x) dx = dv$$

Ein ganz ähnliches Verfahren ist auch bei den Differenzialgleichungen möglich. Es hat daher die gleiche Bezeichnung wie in der Integralrechnung, nämlich *Substitutionsmethode*.²² Oft wird die Substitutionsmethode in der Literatur auch als *Ähnlichkeits-transformation* bezeichnet.

Jede Differenzialgleichung der Form

$$y' = f(ax + by + c), \quad (27)$$

wobei a , b und c konstant sind und $b \neq 0$, lässt sich durch den Lösungsansatz *Substitution* in separierbare Gestalt bringen und lösen.²⁴ Wir führen zuerst die neue unabhängige Variable v ein:²⁵

$$v = ax + by + c \quad (28)$$

Dann ist $v'(x)$ nach x abgeleitet:

$$v' = a + by' \quad (29)$$

²² Vgl. Zwilling 1985, S. 20

²³ Vgl. auch Barth 1997, S. 67

²⁴ Vgl. Zwilling 1985, S. 22

²⁵ Vgl. http://wwwmath.uni-muenster.de/math/inst/num/Preprints/1998/natterer_2/paper.pdf

v' soll nun die neue abhängige Variable sein. Durch das Ersetzen von y' in der Gleichung (29) durch (27) erhalten wir:

$$v' = a + bf(ax + by + c) \quad (30)$$

Ersetzt man $ax + by + c$ in (30) durch v (siehe (28)), so entsteht die Gleichung:

$$v' = a + bf(v) \quad (31)$$

Weiter verfährt man mit der Methode *Trennung der Variablen*, die schon in dem Abschnitt 3.2 vorgestellt wurde:

$$\frac{dv}{dx} = bf(v) + a \quad \left| \cdot \frac{dx}{bf(v) + a} \right.$$

$$\frac{dv}{bf(v) + a} = dx$$

$$\int (bf(v) + a)^{-1} dv = \int dx \quad (32)$$

Durch das Integrieren erhält man auf der linken Seite eine neue Funktion $g(v)$:²⁶

$$g(v) + C = x \quad (33)$$

Wir kehren zu x und y zurück, indem wir v in (33) durch (28) ersetzen:²⁶

$$g(ax + by + c) + C = x \quad (34)$$

Wir erhalten die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung (27).²⁶

Mit einem Beispiel soll das Lösungsverfahren *Substitution* veranschaulicht werden.²⁷

$$y' = x + y + 2 \quad (35) \quad \text{Beispiel}$$

$$v = x + y + 2 \quad (36) \quad \text{Substitution}$$

$$v' = 1 + y' \quad (37) \quad \text{Bilden der ersten Ableitung von } v$$

$$v' = 1 + (x + y + 2) \quad (38) \quad \text{Ersetzen von } y' \text{ in (37) durch (35)}$$

$$v' = 1 + v \quad (39) \quad \text{Ersetzen von } x + y + 2$$

$$\frac{dv}{dx} = 1 + v \quad \left| \cdot \frac{dx}{1+v} \right. \quad v \neq -1 \quad \text{--- Trennung der Variablen}$$

²⁶ Vgl. Zwillling 1985, S. 22

²⁷ Vgl. Zwillling 1985, S. 21

$$\frac{dv}{1+v} = dx \quad (40) \quad \text{Gleichung mit getrennten Variablen}$$

$$\int (1+v)^{-1} dv = \int dx \quad (41) \quad \text{Integrieren nach } dv \text{ bzw. nach } dx$$

$$\ln(1+v) = x + C \quad C \in \mathfrak{R} \quad (42)$$

$$v = e^{x+C} - 1 \quad (43) \quad \text{Auflösen der Gleichung nach } v$$

$$y = v - x - 2 \quad (44) \quad \text{Umformen der Gleichung (36)}$$

$$y = e^{x+C} - 1 - x - 2 \quad (45) \quad \text{Ersetzen von } v \text{ in der Gleichung (44) durch (43)}$$

$$y = e^{x+C} - x - 3 \quad C \in \mathfrak{R} \quad (46) \quad \text{Allgemeine Lösung der DGL (35)}$$

3.4 Homogene Differenzialgleichung

Eine Differenzialgleichung der Form

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (47)$$

wird als *homogen* bezeichnet²⁸ (nicht mit der linearen homogenen Differenzialgleichungen zu verwechseln!). In der Literatur verwendet man auch manchmal den Begriff der *Ähnlichkeitsdifferenzialgleichung*.²⁹ Sie lässt sich durch die *Substitutionsmethode* (siehe Abschnitt 3.3), in eine separierbare Form überführen und mit dem Verfahren *Trennung der Variablen* (siehe Abschnitt 3.2) lösen.²⁹ Der Klammerausdruck wird substituiert und gleich v gesetzt:

$$\frac{y}{x} = v, \quad x \neq 0 \quad (48)$$

Wir erhalten somit die Gleichung

$$y' = f(v). \quad (49)$$

Wie schon in dem Abschnitt 3.1 erwähnt, ist y und dementsprechend v als Funktionen von x zu betrachten. Die Umformung der Gleichung (24) nach y ergibt

$$y(x) = v(x) \cdot x \quad (50)$$

Wir bilden die erste Ableitung der Gleichung (50) nach x auf der linken und rechten Seite unter der Anwendung der Produktregel:

²⁸ Vgl. Walter 1972, S. 19

²⁹ Collatz 1973, S. 18

$$\frac{dy}{dx} = v \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{dv}{dx} \cdot x \quad (51)$$

Durch Kürzen ergibt sich :

$$\frac{dy}{dx} = v + \frac{dv}{dx} \cdot x$$

oder anders geschrieben

$$y' = v + v'x \quad (52)$$

Wir setzen diesen Ausdruck in die Gleichung (49) ein und formen im nächsten Schritt nach $v'x$ um:

$$\begin{aligned} v + v'x &= f(v) \\ v'x &= f(v) - v \end{aligned} \quad (53)$$

Somit haben wir die Differenzialgleichung in die separierbare Gestalt gebracht und können als nächstes das Verfahren *Trennung der Variablen* anwenden.³⁰

$$\frac{dv}{dx} \cdot x = f(v) - v \quad \left| \cdot \frac{dx}{x(f(v) - v)} \right.$$

Wir bekommen eine Gleichung mit getrennten Veränderlichen:

$$\frac{dv}{f(v) - v} = \frac{dx}{x} \quad (54)$$

und können beide Seiten nach dx bzw. dv integrieren:

$$\int (f(v) - v)^{-1} dv = \int x^{-1} dx \quad (55)$$

und erhalten auf der linken Seite eine neue Funktion $g(v)$.³¹

$$g(v) + C = \ln x \quad (56)$$

Wir kehren zu x und y zurück indem wir v mit (48) ersetzen:³⁴

$$g\left(\frac{y}{x}\right) + C = \ln x \quad (57)$$

Dies ist die allgemeine Lösung der homogenen Differenzialgleichung (47).

Wir möchten ein Beispiel für die Lösung der homogenen Differenzialgleichung vorführen.³²

³⁰ Collatz 1973, S. 18

³¹ Zwilling 1985, S. 22

³² Zwilling 1985, S. 23

- $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$ (58) Homogene DGL
- $y' = \frac{y}{x} \left(1 + \ln \frac{y}{x}\right)$ (59) Anwendung der Rechengesetze für Logarithmen
- $y' = \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cdot \ln \frac{y}{x}$ (60) Ausklammern
- $v = \frac{y}{x} \quad x \neq 0$ (61) Substitution
- $y = v \cdot x$ (62) Umformung der Gleichung (61)
- $y' = v + v'x$ (63) 1. Ableitung
- $v + v'x = v + v \ln v$ (64) Einsetzen von (63) und (61) in (60)
- $v'x = v \ln v$ (65) Kürzen
- $\frac{dv}{dx} x = v \ln v \quad \left| \cdot \frac{dx}{x \cdot v \ln v} \right.$ (66) Trennung der Variablen
- $\frac{dv}{v \ln v} = \frac{dx}{x}$ (67) Gleichung mit getrennten Variablen
- $\int (v \ln v)^{-1} dv = \int x^{-1} dx$ (68) Integration
- $\ln(\ln v) = \ln x + C \quad C \in \mathfrak{R}$ (69)
- $\ln v = e^{\ln x + C}$ (70) Auflösen der Gleichung nach $\ln v$
- $\ln v = e^C \cdot x$ (71) Anwendung der Potenzregel
- $e^C = k$ — Definieren der Konstanten e^C als k
- $\ln v = k \cdot x$ (72) Ersetzen der Konstanten e^C durch k
- $v = e^{kx}$ (73) Auflösen der Gleichung nach v
- $\frac{y}{x} = e^{kx}$ (74) Ersetzen von v mit $\frac{y}{x}$ (siehe (61))
- $y = x \cdot e^{kx}$ (75) Allgemeine Lösung der DGL (58)

3.5 Bernoulli'sche Differenzialgleichung

Als *Bernoulli'sche Differenzialgleichungen* werden Differenzialgleichungen folgender Form bezeichnet:³³

$$y'+P(x)y+Q(x)y^n=0 \quad n \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\} \quad (76)$$

(Ist $n=0$, so handelt es sich um die inhomogene und bei $n=1$ um die homogene lineare Differenzialgleichung.³⁴)

Die Bernoulli'sche Differenzialgleichung lässt sich mit der Substitutionsmethode in eine inhomogene lineare Differenzialgleichung überführen.³⁴

Wir dividieren zunächst die Differenzialgleichung durch y^n .³⁵

$$y'+P(x)y+Q(x)y^n=0 \quad | \cdot y^{-n}$$

und bekommen

$$y^{-n}y'+P(x)y^{1-n}+Q(x)=0 \quad (77)$$

Im nächsten Schritt wenden wir die Substitutionsmethode an.³⁴

$$v=(y(x))^{1-n} \quad \text{bzw.} \quad y^{1-n}=v \quad (78)$$

Wir bilden die erste Ableitung von v und benutzen dabei die Kettenregel:

$$v'=(1-n)(y(x))^{-n}y'(x) \quad (79)$$

Wir dividieren (79) durch $(1-n)$, wobei $n \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ und erhalten die Gleichung

$$(y(x))^{-n}y'(x)=\frac{v'}{(1-n)},$$

die sich auch in Kurzform

$$y^{-n}y'=\frac{v'}{(1-n)} \quad (80)$$

schreiben lässt.

Als Nächstes führen wir die Substitution durch und setzen (78) und (80) in die Differenzialgleichung (77) ein:

$$\frac{v'}{(1-n)}+P(x) \cdot v+Q(x)=0 \quad (81)$$

³³ Collatz 1973, S. 23

³⁴ Vgl. Kunick 1989, S. 16

³⁵ Vgl. Zwilling 1985, S. 82

Wir multiplizieren die Differenzialgleichung (81) mit $(1-n)$

$$\frac{v'}{(1-n)} + P(x) \cdot v + Q(x) = 0 \quad | \cdot (1-n) \quad (82)$$

und bekommen

$$v' + (1-n) \cdot P(x) \cdot v + (1-n) \cdot Q(x) = 0 \quad (82)$$

Wir erhalten eine inhomogene lineare Differenzialgleichung erster Ordnung.

Lösungsmethoden für lineare Differenzialgleichungen werden in dieser Arbeit nicht behandelt, denn dies ist die Thematik einer weiteren Seminararbeit. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle auf weiterführenden Lösungsansatz für inhomogene lineare Differenzialgleichung verzichtet, wobei aber in dem folgenden Beispiel³⁶ die Lösung komplett ausgeführt wird.

$$xy' - 2y = x^2 y^{\frac{1}{2}} \quad (83) \quad \text{Beispiel (hier ist } n = \frac{1}{2} \text{)}$$

$$xy' - 2y = x^2 y^{\frac{1}{2}} \quad | \cdot x^{-1} y^{-\frac{1}{2}} \quad \text{— Division durch } y^n \text{ bzw. Multiplikation mit } y^{-n}$$

$$y^{-\frac{1}{2}} y' - 2x^{-1} y^{\frac{1}{2}} = x \quad (84)$$

$$v = y^{\frac{1}{2}} \quad (85) \quad \text{Definieren des Substitutionsterms}$$

$$v' = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} y' \quad | \cdot 2 \quad (86) \quad \text{erste Ableitung von } v$$

$$2v' = y^{-\frac{1}{2}} y' \quad (87)$$

$$2v' - 2x^{-1} v = x \quad (88) \quad \text{Substitution: Einsetzen von (87) und (85) in (84)}$$

Wir erhalten die gesuchte inhomogene lineare Differenzialgleichung.

$$2v' - 2vx^{-1} = x \quad | :2 \quad \text{—}$$

$$v' - vx^{-1} = 0,5x \quad (89)$$

Wir suchen zuerst die Lösung der entsprechenden homogenen Differenzialgleichung, die für den Fall $0,5x = 0$ entsteht.

$$v' - vx^{-1} = 0 \quad (89) \quad \text{Entsprechende homogene lineare DGL}$$

³⁶ Vgl. Kunick 1989, S.16

$$v' = \frac{v}{x} \quad \text{bzw.} \quad \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x} \quad \left| \cdot \frac{dx}{v} \right. \quad (90) \quad \text{Trennung der Variablen}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \quad (91) \quad \text{Gleichung mit getrennten Variablen}$$

$$\int v^{-1} dv = \int x^{-1} dx \quad (92) \quad \text{Integration}$$

$$\ln v = \ln x + k \quad k \in \mathfrak{R} \quad (93)$$

$$k = \ln C \quad \text{—} \quad \text{Definieren der Konstanten } k \text{ als } \ln C$$

$$\ln v = \ln x + \ln C \quad (94) \quad \text{Ersetzen der Konstanten } k \text{ durch } C$$

$$\ln v = \ln(Cx) \quad (95) \quad \text{Anwendung der Rechengesetze für Logarithmen}$$

$$v = Cx \quad (96) \quad \text{Die ln-Funktion hebt sich}$$

An dieser Stelle wenden wir die Methode der Variation der Konstanten an, indem wir die Konstante C zunächst nicht als Konstante sondern als Funktion von x betrachten.

$$v' = C'x + C \quad (97) \quad \text{1. Ableitung von } v \text{ nach } C$$

$$v' - vx^{-1} = 0,5x \quad \text{—} \quad \text{Wir kehren zu der inhomogenen DGL zurück}$$

$$C'x + C - Cxx^{-1} = 0,5x \quad (98) \quad \text{Und ersetzen } v \text{ durch (96) bzw. } v' \text{ durch (97)}$$

$$C'x = 0,5x \quad | :x \quad (99)$$

$$C' = 0,5 \quad (100)$$

$$\int C' dx = \int 0,5 dx \quad (101) \quad \text{Integration beider Seiten nach } dx$$

$$C = 0,5x + C_1 \quad (102) \quad \text{Wir erhalten eine neue Integrationskonstante } C_1$$

$$v = y^{\frac{1}{2}} \quad \left| \left(\quad \right)^2 \Rightarrow v^2 = y \quad (103) \quad \text{Umformung des Substitutionsterms (85) nach } y$$

$$v = Cx \Rightarrow v^2 = C^2 x^2 \quad (104) \quad \text{Quadrieren der Gleichung (96)}$$

$$y = v^2 = (0,5x + C_1)^2 x^2 \quad (105) \quad \text{Ersetzen von } C \text{ mit (102)}$$

$$y = (0,5x + C_1)^2 x^2 \quad (107) \quad \text{Allgemeine Lösung der DGL}$$

3.6 Riccati'sche Differenzialgleichung

Die allgemeine Form der *Riccati'schen Differenzialgleichung* lautet³⁷

$$y'+P(x)y+Q(x)y^2=R(x) \quad , \quad Q(x) \neq 0 \quad (108)$$

Für den Fall $R(x)=0$ geht die Riccati'sche Differenzialgleichung in eine Bernoulli'sche Differenzialgleichung über. Andernfalls lässt sich das allgemeine Integral nur dann bestimmen, wenn bereits ein partikuläres Integral y_p zum Beispiel durch Ausprobieren bekannt ist.³⁸

Man wendet die Substitutionsmethode an und setzt³⁸

$$y = y_p + v(x) \quad (109)$$

in die Differenzialgleichung (108) ein; es folgt

$$(y'_p + v') + P(y_p + v) + Q(y_p^2 + 2y_p v + v^2) = R(x) \quad (110)$$

Da y_p als partikuläres Integral (partikuläre Lösung) die Differenzialgleichung (108) erfüllt

$$y'_p + P y_p + Q y_p^2 = R(x) \quad (111)$$

lassen sich (110) und (111) gleichsetzen:³⁸

$$(y'_p + v') + P(y_p + v) + Q(y_p^2 + 2y_p v + v^2) = y'_p + P y_p + Q y_p^2$$

Nach dem Ausklammern ergibt sich:

$$y'_p + v' + P y_p + P v + Q y_p^2 + 2Q y_p v + Q v^2 = y'_p + P y_p + Q y_p^2$$

und durch Kürzen bekommen wir schließlich:

$$v' + P v + 2Q y_p v + Q v^2 = 0$$

Wir erhalten also eine Bernoulli'sche Differenzialgleichung

$$v' + (P + 2Q y_p) v + Q v^2 = 0, \quad (112)$$

die sich nach der in dem Abschnitt 3.5 vorgestellten Methode lösen lässt.

Die Vorgehensweise für die Lösung einer Riccati'schen Differenzialgleichung wird anhand eines konkreten Beispiels demonstriert.

³⁷ Weise 1948, S. 23

³⁸ Vgl. Kunick 1989, S. 25

Als Beispiel soll hier die Differenzialgleichung

$$xy' - (2x^2 + 1)y - xy^2 = x^3 \quad (113)$$

gelöst werden.

Durch das Raten erhält man das partikuläre Integral

$$y_p(x) = -x$$

Wir verwenden den Ansatz der Substitution $y = y_p + v(x)$:

$$y = -x + v(x) \quad (114)$$

und setzen diesen Ausdruck in die Differenzialgleichung (113) ein:

$$x(v' - x') - (2x^2 + 1)(v - x) - x(v^2 - 2xv + x^2) = x^3$$

Nach dem Ausklammern ergibt sich

$$xv' - xx' - 2x^2v + 2x^3 - v + x - xv^2 + 2x^2v - x^3 = x^3$$

Durch Zusammenzählen der Summanten entsteht die Gleichung

$$xv' - xx' + x^3 - v + x - xv^2 = x^3 \quad (115)$$

Das partikuläre Integral $y_p(x) = -x$ erfüllt die Differenzialgleichung (113):

$$x(-x') - (2x^2 + 1)(-x) - x(-x)^2 = x^3$$

Diese Gleichung lässt sich vereinfachen:

$$-xx' + 2x^3 + x - x^3 = x^3$$

$$-xx' + x^3 + x = x^3 \quad (116)$$

Die Gleichungen (115) und (116) werden gleichgesetzt:

$$xv' - xx' + x^3 - v + x - xv^2 = -xx' + x^3 + x$$

Nach der Addition der Summanten erhalten wir die gesuchte Bernoulli'sche Differenzialgleichung:

$$xv' - v - xv^2 = 0 \quad (117)$$

Weiter verfährt man wie in dem Abschnitt 3.5. Die ausführliche Lösung dazu wird in dem Anhang zu der vorliegenden Arbeit erläutert. Durch die Substitution

$$u = (v(x))^{-1} \quad \text{und} \quad u' = -v^{-2}v'$$

bekommen wir eine inhomogene lineare Differenzialgleichung

$$u'x + u = -x. \quad (118)$$

Die zugehörige homogene lineare Differenzialgleichung

$$u_h'x + u_h = 0 \quad (119)$$

hat nach der Trennung der Variablen die Lösung

$$u_h = \frac{C_1}{x} \quad \text{mit } C_1 \in \mathfrak{R}. \quad (120)$$

Mit dem Verfahren der Variation der Konstanten findet man dann die Lösung der inhomogenen linearen Differenzialgleichung:

$$u = -\frac{1}{2}x + \frac{C_2}{x} \quad \text{mit } C_2 \in \mathfrak{R} \quad (121)$$

und erhält für $v(x)$

$$v = \frac{1}{-\frac{1}{2}x + \frac{C_2}{x}}$$

oder einfacher geschrieben

$$v = \frac{2x}{2C_2 - x^2} \quad \text{mit } C_2 \in \mathfrak{R}. \quad (122)$$

Schließlich bekommt man die Lösung der Riccati'schen Differenzialgleichung:

$$y = -x + \frac{2x}{2C_2 - x^2} = \frac{x^3 + 2x - 2C_2x}{2C_2 - x^2} \quad \text{mit } C_2 \in \mathfrak{R} \quad (123)$$

Kapitel 4: Schluss

Die vorliegende Arbeit soll einen Einblick in den Bereich der Differenzialgleichungen verschaffen und so weit wie möglich allgemeine Lösungsmethoden vorzustellen, wobei auf die Problematik ausschließlich von der mathematischen Seite eingegangen wird. Die Thematik dieser Arbeit umfasst nur einen geringen Teil des umfangreichen Bereiches der Differenzialgleichungen. Hier werden gewöhnliche Differenzialgleichungen erster Ordnung behandelt und auf partielle Differenzialgleichungen, sowie Differenzialgleichungen höherer Ordnung verzichtet, denn ein tieferes Vordringen in das Gebiet der Differenzialgleichungen würde den Umfang dieser Arbeit sprengen.

Differenzialgleichungen spielen in den Naturwissenschaften, die mathematischer Hilfsmittel bedürfen eine sehr wichtige Rolle. Leider – so hat eine umfassende Theorie erwiesen, sind, ähnlich wie in der Integralrechnung, nur wenige Aufgaben elementar lösbar und diese auch nicht nach einem einheitlichen System, sondern in vielfältiger Weise. Die Problemstellung ist meistens typisch, d. h. von dem jeweiligen Typ abhängig; dementsprechend sind die Wege zur Lösung charakteristisch und nicht allgemeiner Art. Es bedarf also an weiterer Forschung auf dem Gebiet der Differenzialgleichungen, um neue Kategorien aus der gesamten Menge herauszufiltern und passende Lösungsverfahren für diese zu entwickeln.

Literaturverzeichnis

Ayres, Frank JR PhD: *Differentialgleichungen*. Schaum's Outline Überblicke/ Aufgaben. Übersetzung und deutsche Bearbeitung: Dipl.-Mathematiker Klaus Wichmann. McGraw-Hill Book Company GmbH, Düsseldorf 1978

Bachmann, H.: *Einführung in die Analysis. Theorie – Aufgaben – Ergebnisse*. Teil 3: Integrieren – Differenzieren II. Zürich 1975.

Barth, Friedrich/ Mühlbauer, Paul/ Nikol Friedrich/ Wörle Karl: *Mathematische Formeln und Definitionen*. Bayerischer Schulbuch-Verlag; J. Lindauer Verlag (Schaefer), München 1998, 6.Auflage

Bronstein, Ilja. N./ Semendjajew, Konstantin A./ Musiol, Gerhard/ Mühlig, Heiner: *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main, Thun 1999, 4.überarbeitete und erweiterte Auflage

Collatz, Lothar: *Differentialgleichungen. Eine Einführung unter besonderer Berücksichtigung der Anwendungen*. B. G. Teubner, Stuttgart 1973, 5.Auflage

Demmig, Richard: *Differentialrechnung* . Repetitorium höhere Mathematik, Teil 1. Demmig Verlag, Nauheim 1991, 29. durchgesehene Auflage

Kunick, Albrecht: *Gewöhnliche Differentialgleichungen mit Übungsaufgaben und ausführlichen Lösungen*. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim/Wien/Zürich 1989

Luther, Wolfram/ Niederdrenk, Klaus/ Reutter, Fritz/ Yserentant, Harry: *Gewöhnliche Differentialgleichungen. Analytische und numerische Behandlung*. Vieweg Verlag, Braunschweig 1987

Preuß, Wolfgang / Kossow Andreas: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Mathematik in Beispielen, Band 7. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt/Main, Thun 1990

Zwilling, Wolfgang: *Lineare Differentialgleichungen*. Fachtexte für die Oberstufe. Porta-Nigra-Verlag, Trier 1985

Walter, Wolfgang: *Gewöhnliche Differentialgleichungen. Eine Einführung*. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1972

Weise, Karl Heinrich: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Bücher der Mathematik und Naturwissenschaften. Wolfenbütteler Verlagsanstalt, Hannover 1948

Verwendete Internetseiten

Fröhner: *Differentialgleichungen*. Mathematik (II - 8/9), Studiengang Bauingenieurwesen
[<http://www.math.tu-cottbus.de/INSTITUT/lsing2/hmbiw2/skript7/node4.html>]
[Stand 13.10.2003]

Grossmann, Wilfried: *Mathematik II (Analysis II) für Statistik und VWL, Differentialgleichungen*. Wien-Fakultät für Wirtschaftswissenschaften und Informatik
[http://mailbox.univie.ac.at/Wilfried.Grossmann/uebungen/Mathe2_SS03/Differentialgleichungen.pdf]
[Stand 13.10.2003]

Im Hof, Hans-Christoph: *Mathematik für Naturwissenschaftler I; 6. Differentialgleichungen*. Mathematisches Institut Universität Basel, Switzerland, 26. September 2001
[<http://www.math.unibas.ch/~imhof/MfN/LinAlg/Leitfaden/Leitfaden085-96.pdf>] [Stand 13.10.2003]

Leuchs G.: *Differentialgleichungen*, Lehrstuhl für Optik Uni Erlangen 31. Oktober 2000
[<http://kerr.physik.uni-erlangen.de/~langer/dgl.ps>] [Stand 13.10.2003]

Natterer F.: *Vorlesungsskript Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Institut für numerische und instrumentelle Mathematik
[http://wwwmath.uni-muenster.de/math/inst/num/Preprints/1998/natterer_2/paper.pdf]
[Stand 13.10.2003]

Tamburrino M.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen, Mathematik für Ingenieure BB2*. FHSO, Februar 2003 [<http://mypage.bluewin.ch/tamburrino/FHSO/03-Gewoehnliche-DGL.pdf>]
[Stand 13.10.2003]

Wikipedia, die freie Enzyklopädie: *Differentialgleichung*.
[<http://de.wikipedia.org/wiki/Differentialgleichung>] [Stand 13.10.2003]